Αναγκαία συνθήκη για να είναι το $f: G \to \mathbb{R}^n$ πεδίο κλίσεων

Στην περίπτωση που $f \in C^1(G)$, η $Df(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι συμμετρικός $\forall x \in G$.

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \nabla \varphi = f \\ \Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = f_i \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\varphi(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1}\varphi(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n}\varphi(x) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\varphi(x) \end{pmatrix}$$

και άρα αφού $f \in C^1 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in C^1 \ \forall i = 1, \dots, n$
ο Εσσιανός πίνακας της $\varphi: G \to \mathbb{R}$ είναι συμμετρικός (Από θεώρημα Schwartz).

πχ

Το $g(x,y) = (y, y-x)^T$ έχει $Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{g \in C^1}{\Longrightarrow}$

το g δεν είναι πεδίο κλίσεων

Ενώ το $f(x,y) = (y, x-y)^T$ έχει $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Longrightarrow$ το f μπορεί να είναι πεδίο κλίσεων

Ικανή συνθήκη για να είναι το $f: G \to \mathbb{R}^n$ πεδίο κλίσεων

Στην περίπτωση που $f \in C^1(G)$ και G αστρόμορφο[1] και $Df(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός, $\forall x \in G \Rightarrow f$ είναι πεδίο κλίσεων.

1: G αστρόμορφο $\Leftrightarrow (\exists x_0 \in G)(\forall x \in G): \{x_0 + t(x - x_0) : t \in [0,1]\} \subseteq G$
Συνεπώς, κάθε κυρτό G είναι αστρόμορφο και κάθε αστρόμορφο είναι συνεκτικό.
(κυρτό $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in G : \{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 : \lambda \in [0,1]\} \subset G$

Παρατήρηση: Το "G αστερόμορφο" είναι μία ικανή συνθήκη για να είναι το $f \in C^1$, $Df(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός $\forall x \in G$ πεδίο κλίσεων. πχ τα "κλασικά" πεδία κλίσεων ορίζονται στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, που δεν είναι αστερόμορφο

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|} = \nabla \|x\| \quad , x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2} = \nabla (\ln \|x\|)$$

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^k} = \nabla \left(\frac{1}{2-k} \cdot \frac{1}{\|x\|^{k-2}} \right), \ k>2 \ , x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Πως μπορούμε να βρούμε κάποια $\varphi : G \to \mathbb{R}$ με $\nabla \varphi = f$ (εάν ξέρουμε ότι η f είναι πεδίο κλίσεων)

1η ΜΕΘΟΔΟΣ: (πιο θεωρητική)

Αν $f : G \to \mathbb{R}^n$, είναι πεδίο κλίσεων (και G συνεκτικό) Επιλέγουμε ένα $x_0 \in G$ σταθερό και υπολογίζουμε $\forall x \in G$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:
$\varphi(x) := \int_\gamma f(y) \cdot dy$ με $\gamma : [\alpha, \beta] \to G$ κατά τμήματα C^1 και $\gamma(\alpha) = x_0$ και $\gamma(\beta) = x$.
(όπως είδαμε στο Θεώρημα, τότε θα έχουμε $\nabla \varphi(x) = f(x)$ $\forall x \in G$) Αφού πεδίο κλίσεων, οποιον δρόμο και αν επιλέξουμε από το x_0 στο x το $\varphi(x)$ πρέπει να είναι το ίδιο $\Rightarrow$ επιλέγουμε τον πιο εύκολο

2η ΜΕΘΟΔΟΣ (ΠΙΟ ΠΡΑΚΤΙΚΗ)

Ψάχνουμε "κατευθείαν" ένα $\varphi : G \to \mathbb{R}$ ώστε $\nabla \varphi(x) = f(x), x \in G$

πχ (ΠΡΑΚΤΙΚΑ)

$f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{είναι πεδίο κλίσεων αφού} \\ Df(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ συμμετρικός και } \mathbb{R}^2 \text{ αστερόμ.} \end{array} \right\}$

Θέλουμε να βρούμε ένα $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\nabla \varphi = f$

Όπου $\nabla \varphi(x,y) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \right)^T = (y, x-y)^T$

Δηλ. $\partial \varphi / \partial x (x,y) = y \Rightarrow \varphi(x,y) = y \cdot x + c(y)$.

Θα πρέπει όμως να έχουμε:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x-y \Rightarrow x + c'(y) = x-y \Rightarrow c'(y) = -y$$

$$\Rightarrow c(y) = -\frac{y^2}{2} + \tilde{c} \Rightarrow \varphi(x,y) = yx - \frac{y^2}{2} + \tilde{c}.$$

Σκέψη:
Λογικά εάν το $g: G \to \mathbb{R}$ δεν είναι πεδίο κλίσεων δεν μπορούμε να βρούμε έτσι (με αυτή τη μέθοδο) κάποιο φ. Ισχύει αυτό;

πχ

$g(x,y) = (y, y-x)^T \Rightarrow Dg(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ μη συμμετρικό

ενώ $g \in C^1 \Rightarrow$ δεν είναι πεδίο κλίσεων)

Έστω ότι ψάχνω

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\nabla\varphi(x,y) = g(x,y)$ δηλ. $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = y$

και $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = y \Rightarrow \varphi(x,y) = yx + C(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x + c'(y) = -x+y \Rightarrow c'(y) = -2x+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(y) = -2x + \frac{y^2}{2} + \tilde{c} \underset{\tilde{c}=0}{\Rightarrow} \varphi(x,y) = -yx + \frac{y^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -y$$ (Αδύνατο) Διότι όχι πεδ. κλίσεων!

'Άσκηση

Εξετάστε αν είναι πεδία κλίσεων (στο μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού) και αν είναι βρείτε το δυναμικό τους:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 12xy+3 \\ 6x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} xy \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y,z) = (x,y,z), (x^2y, ze^x, xy\ln z), (x+z, -y-z, x-y)$$